I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

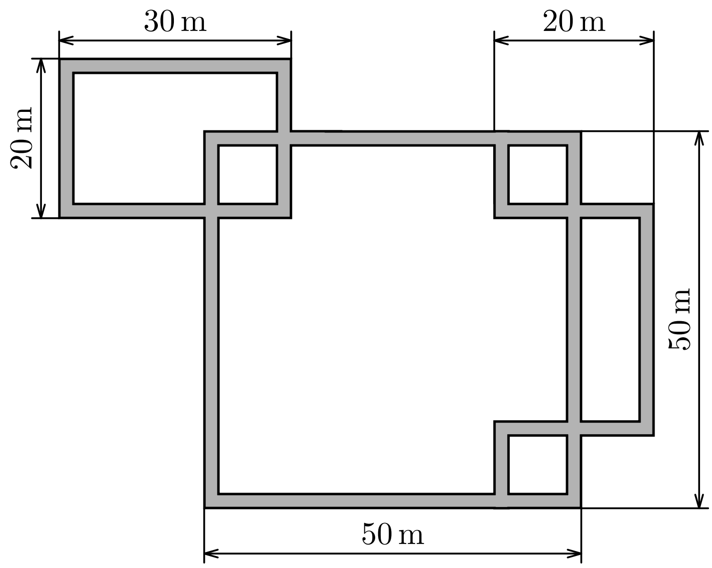
Naše slovenská babička nakupovala v obchodě, ve kterém měli jen jablka, banány a hrušky. Jablka byla po 50 centech za kus, hrušky po 60 centech a banány byly levnější než hrušky. Babička koupila pět kusů ovoce, mezi kterými byl právě jeden banán, a zaplatila 2 eura a 75 centů.

Kolik centů mohl stát jeden banán? Určete všechny možnosti. (*K. Jasenčáková*)

Z5–I–2

Všechny cesty v parku jsou metr široké a jsou tvořeny celými čtvercovými dlaždicemi o rozměrech metr krát metr, které k sobě těsně přiléhají. Cesty, u kterých se mají vyměnit všechny dlaždice, jsou schematicky znázorněny na obrázku.

Kolik dlaždic se má vyměnit? (*E. Semerádová*)



Z5–I–3

Pan král rozdával svým synům dukáty. Nejstaršímu synovi dal určitý počet dukátů, mladšímu dal o jeden dukát méně, dalšímu dal opět o jeden dukát méně a takto postupoval až k nejmladšímu. Poté se vrátil k nejstaršímu synovi, dal mu o jeden dukát méně než před chvílí nejmladšímu a stejným způsobem jako v prvním kole rozdával dál. V tomto kole vyšel na nejmladšího syna jeden dukát. Nejstarší syn dostal celkem 21 dukátů.

Určete, kolik měl král synů a kolik jim celkem rozdal dukátů. (*K. Pazourek*)

Z5–I–4

Vojta začal vypisovat do sešitu číslo letošního školního roku 2019202020192020… a tak pokračoval pořád dál. Když napsal 2020 číslic, přestalo ho to bavit.

Kolik tak napsal dvojek? (*L. Růžičková*)

Z5–I–5

Dědeček má v zahradě tři jabloně a na nich celkem 39 jablek. Jablka rostou jen na osmi větvích: na jedné jabloni plodí dvě větve, na dvou jabloních plodí po třech větvích. Na různých větvích jsou různé počty jablek, ale na každé jabloni je stejný počet jablek.

Kolik jablek mohlo být na jednotlivých větvích? Určete alespoň jednu možnost.

(*A. Bohiniková*)

Z5–I–6

Obdélníkový ubrus je poskládán ze stejně velkých čtverců bílé, šedé a černé barvy, a to tak, že

- čtverce se společnou stranou mají různé barvy,
- bílé čtverce nemají společný vrchol,
- černé čtverce nemají společný vrchol,
- černých čtverců je šest,
- na každé straně ubrusu jsou nejméně tři čtverce.

Jak mohl ubrus vypadat? Najděte a nakreslete alespoň tři možnosti.

(*K. Jasenčáková*)

I. kolo kategorie Z6

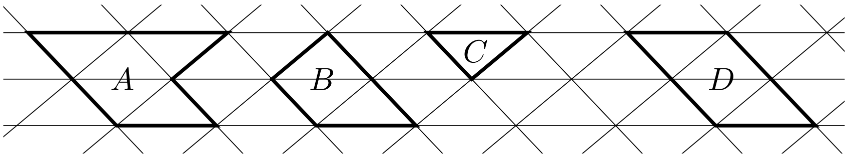
Z6–I–1

Babička řekla vnoučatům: „Dnes mám 60 roků a 50 měsíců a 40 týdnů a 30 dnů."
Kolikáté narozeniny měla babička naposledy? (*L. Hozová*)

Z6–I–2

Na obrázku je trojúhelníková síť a v ní čtyři mnohoúhelníky. Obvody mnohoúhelníků A, B a D jsou po řadě 56 cm, 34 cm a 42 cm.

Určete obvod trojúhelníku C. (*K. Pazourek*)



Z6–I–3

Na písemce bylo 25 úloh trojího druhu: lehké po 2 bodech, středně těžké po 3 bodech a těžké po 5 bodech. Správně vyřešené úlohy byly hodnoceny uvedeným počtem bodů podle stupně obtížnosti, jinak 0. Nejlepší možné celkové hodnocení písemky bylo 84 bodů. Petr správně vyřešil všechny lehké úlohy, polovinu středně těžkých a třetinu těžkých.

Kolik bodů získal Petr za svoji písemku? (*A. Bohiniková*)

Z6–I–4

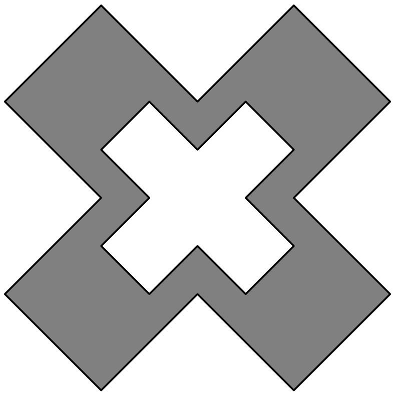
Jednou si král zavolal všechna svá pážata a postavil je do řady. Prvnímu pážeti dal určitý počet dukátů, druhému dal o dva dukáty méně, třetímu opět o dva dukáty méně a tak dále. Když došel k poslednímu pážeti, dal mu příslušný počet dukátů, otočil se a obdobným způsobem postupoval na začátek řady (tj. předposlednímu pážeti dal o dva dukáty méně než před chvílí poslednímu atd.). Na první páže v tomto kole vyšly dva dukáty. Poté jedno z pážat zjistilo, že má 32 dukátů.

Kolik mohl mít král pážat a kolik celkem jim mohl rozdat dukátů? Určete všechny možnosti. (*K. Pazourek*)

Z6–I–5

Útvar na obrázku vznikl tak, že z velkého kříže byl vystřižen malý kříž. Každý z těchto křížů může být složen z pěti shodných čtverců, přičemž strany malých čtverců jsou poloviční vzhledem ke stranám velkých čtverců. Obsah šedého útvaru na obrázku je $45\,\mathrm{cm}^2$.

Jaký je obsah velkého kříže? (*L. Růžičková*)



Z6–I–6

Majka zkoumala vícemístná čísla, ve kterých se pravidelně střídají liché a sudé číslice. Ta, která začínají lichou číslicí, nazvala komická a ta, která začínají sudou číslicí, nazvala veselá. (Např. číslo 32387 je komické, číslo 4529 je veselé.)

Mezi trojmístnými čísly určete, zda je víc komických nebo veselých, a o kolik.

(*M. Dillingerová*)

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Sněhurka se sedmi trpaslíky nasbírali šišky na táborák. Sněhurka řekla, že počet všech šišek je číslo dělitelné dvěma. První trpaslík prohlásil, že je to číslo dělitelné třemi, druhý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné čtyřmi, třetí trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné pěti, čtvrtý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné šesti, pátý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné sedmi, šestý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné osmi, sedmý trpaslík řekl, že je to číslo dělitelné devíti. Dva z osmi sběračů, kteří se k počtu šišek vyjadřovali bezprostředně po sobě, neměli pravdu, ostatní ano.

Kolik šišek bylo na hromadě, pokud jich jistě bylo méně než 350? (*L. Hozová*)

Z7–I–2

V ostroúhlém trojúhelníku KLM je V průsečík jeho výšek a X je pata výšky na stranu KL. Osa úhlu XVL je rovnoběžná se stranou LM a úhel MKL má velikost $70°$.

Jakou velikost mají úhly KLM a KML? (*L. Hozová*)

Z7–I–3

Roman má rád kouzla a matematiku. Naposled kouzlil s trojmístnými nebo čtyřmístnými čísly takto:

- z daného čísla vytvořil dvě nová čísla tak, že ho rozdělil mezi číslicemi na místě stovek a desítek (např. z čísla 581 by dostal 5 a 81),
- nová čísla sečetl a zapsal výsledek (v uvedeném příkladu by dostal 86),
- od většího z nových čísel odečetl menší a výsledek zapsal za předchozí součet, čímž vykouzlil výsledné číslo (v uvedeném příkladu by dostal 8676).

Z kterých čísel mohl Roman vykouzlit a) 171, b) 1513? Určete všechny možnosti.

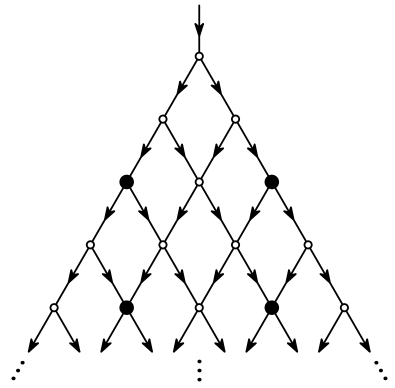
Jaké největší číslo lze takto vykouzlit a z kterých čísel může vzniknout? Určete všechny možnosti. (*M. Dillingerová*)

Z7–I–4

Jeníčka a Mařenku zaujalo vodní dílo, jehož část je znázorněna na obrázku. Koryta se postupně rozdělují a zase spojují v naznačených bodech, v každé řadě je o jeden takový bod víc než v řadě předchozí. Voda proudí v naznačených směrech a při každém větvení se vodní tok rozdělí do dvou koryt se stejným průtokem.

Jeníčka zajímalo, kolik vody protéká v součtu čtyřmi místy zvýrazněnými černě. Mařenku zajímalo, kolik vody protéká v součtu všemi místy, která jsou ve 2019. řadě.

Porovnejte celkové průtoky Jeníčkovými a Mařenčinými místy. (*K. Jasenčáková*)



Z7–I–5

Hvězdný čtverec je taková čtvercová tabulka čísel, pro kterou platí, že součty čísel v jednotlivých řádcích a sloupcích jsou stále stejné. Na obrázku je pozůstatek hvězdného čtverce, v němž byla čísla v jednom řádku a jednom sloupci smazána.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	

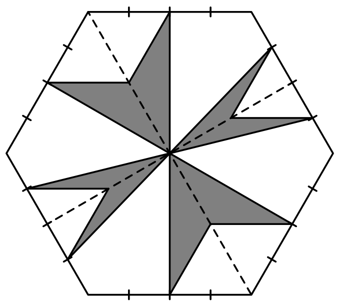
Doplňte chybějící čísla tak, aby všechna byla celá a právě čtyři záporná. Určete všechny možnosti. (*E. Semerádová*)

Z7–I–6

Z pravidelného šestiúhelníku byl vystřižen útvar jako na obrázku. Přitom vyznačené body jak na obvodu, tak uvnitř šestiúhelníku dělí příslušné úsečky na čtvrtiny.

Jaký je poměr obsahů původního šestiúhelníku a vystřiženého útvaru?

(*A. Bohiniková*)



I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby jeho úhlopříčka BD měla velikost 8 cm a vzdálenost vrcholu B od přímky AD byla 5 cm. Určete všechny možnosti. (*K. Pazourek*)

Z8–I–2

Richard si pohrával s dvěma pětimístnými čísly. Každé sestávalo z navzájem různých číslic, které u jednoho byly všechny liché a u druhého všechny sudé. Po chvíli zjistil, že součet těchto dvou čísel začíná dvojčíslím 11 a končí číslem 1 a že jejich rozdíl začíná číslem 2 a končí dvojčíslím 11.

Určete Richardova čísla. (*M. Dillingerová*)

Z8–I–3

Vendelín bydlí mezi dvěma zastávkami autobusu, a to ve třech osminách jejich vzdálenosti. Dnes vyrazil z domu a zjistil, že ať by utíkal k jedné, nebo druhé zastávce, dorazil by na zastávku současně s autobusem. Průměrná rychlost autobusu je 60 km/h.

Jakou průměrnou rychlostí dnes běží Vendelín? (*L. Hozová*)

Z8–I–4

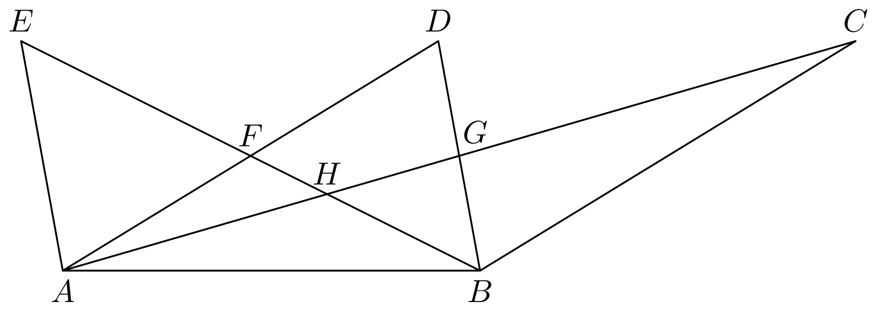
Pro pětici celých čísel platí, že když k prvnímu přičteme jedničku, druhé umocníme na druhou, od třetího odečteme trojku, čtvrté vynásobíme čtyřmi a páté vydělíme pěti, dostaneme pokaždé stejný výsledek.

Najděte všechny takové pětice čísel, jejichž součet je 122. (*L. Dedková*)

Z8–I–5

Pro osm navzájem různých bodů jako na obrázku platí, že body C, D, E leží na přímce rovnoběžné s přímkou AB, F je středem úsečky AD, G je středem úsečky AC a H je průsečíkem přímek AC a BE. Obsah trojúhelníku BCG je $12\,\mathrm{cm}^2$ a obsah čtyřúhelníku $DFHG$ je $8\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsahy trojúhelníků AFE, AHF, ABG a BGH. (*E. Semerádová*)



Z8–I–6

V Kocourkově používají mince pouze se dvěma hodnotami, které jsou vyjádřeny v kocourkovských korunách kladnými celými čísly. Pomocí dostatečného množství takových mincí je možné zaplatit jakoukoli celočíselnou částku větší než 53 kocourkovských korun, a to přesně a bez vracení. Částku 53 kocourkovských korun však bez vracení zaplatit nelze.

Zjistěte, které hodnoty mohly být na kocourkovských mincích. Určete alespoň dvě řešení. (*A. Bohiniková*)

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Ondra, Matěj a Kuba se vracejí ze sbírání ořechů, celkem jich mají 120. Matěj si stěžuje, že Ondra má jako vždy nejvíc. Otec přikáže Ondrovi, aby přisypal ze svého Matějovi tak, aby mu počet ořechů zdvojnásobil. Nyní si stěžuje Kuba, že nejvíc má Matěj. Na otcův příkaz přisype Matěj Kubovi tak, že mu počet ořechů zdvojnásobí. Na to se zlobí Ondra, že nejméně ze všech má teď on. Kuba tedy přisype Ondrovi tak, že mu počet ořechů zdvojnásobí. Teď mají všichni stejně a konečně je klid.

Kolik ořechů měl původně každý z chlapců? (*M. Volfová*)

Z9–I–2

V trojúhelníku ABC leží bod P ve třetině úsečky AB blíže bodu A, bod R je ve třetině úsečky PB blíže bodu P a bod Q leží na úsečce BC tak, že úhly PCB a RQB jsou shodné.

Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a PQC. (*L. Růžičková*)

Z9–I–3

Pro která celá čísla x je podíl $\frac{x+11}{x+7}$ celým číslem? Najděte všechna řešení. (*L. Hozová*)

Z9–I–4

Maty dopadl padákem na ostrov obývaný dvěma druhy domorodců: Poctivci, kteří vždy mluví pravdu, a Lháři, kteří vždy lžou. Před dopadem zahlédl v dálce přístav, ke kterému se hodlal dostat.

Na prvním rozcestí potkal Maty jednoho domorodce a opodál viděl druhého. Požádal prvního, aby se zeptal toho druhého, zda je Lhář, nebo Poctivec. První domorodec Matymu vyhověl, šel se zeptat a když se vrátil, oznámil Matymu, že druhý domorodec tvrdí, že je Lhář. Poté se Maty prvního domorodce zeptal, která cesta vede k přístavu. Ten mu jednu cestu ukázal a dál si Matyho nevšímal.

Má, nebo nemá Maty domorodci věřit? Vede, nebo nevede ona cesta k přístavu? (*M. Volfová*)

Z9–I–5

Majka zkoumala vícemístná čísla, ve kterých se pravidelně střídají liché a sudé číslice. Ta, která začínají lichou číslicí, nazvala komická a ta, která začínají sudou číslicí, nazvala veselá. (Např. číslo 32387 je komické, číslo 4529 je veselé.)

Majka vytvořila jedno trojmístné komické a jedno trojmístné veselé číslo, přičemž šest použitých číslic bylo navzájem různých a nebyla mezi nimi 0. Součet těchto dvou čísel byl 1617. Součin těchto dvou čísel končil dvojčíslím 40.

Určete Majčina čísla a dopočítejte jejich součin. (*M. Dillingerová*)

Z9–I–6

Kristýna zvolila jisté liché přirozené číslo dělitelné třemi. Jakub s Davidem pak zkoumali trojúhelníky, které mají obvod v milimetrech roven Kristýnou zvolenému číslu a jejichž strany mají délky v milimetrech vyjádřeny navzájem různými celými čísly.

Jakub našel takový trojúhelník, v němž nejdelší ze stran má největší možnou délku, a tuto hodnotu zapsal na tabuli. David našel takový trojúhelník, v němž nejkratší ze stran má největší možnou délku, a tuto hodnotu také zapsal na tabuli. Kristýna obě délky na tabuli správně sečetla a vyšlo jí 1 681 mm.

Určete, které číslo Kristýna zvolila. (*L. Růžičková*)